MÁGIKUS KOCKA KÉSZÍTÉNEK ALGORITMUSA

Marián TRENKLER

Az emberek évszázadokon keresztűl fogalakoztak a mágikus négyzetekkel. A mágikus kocka a mágikus négyzetet csoportjára tartozik. Az első írásos emlékek a mágikus kockáról *Pierre de Fermat*-tól 1640-ből számaznak. Rengeteg információ található a mágikus kockákról és négyzetekről az idézett irodalomban és sok WEB-oldalon.

Az *n-ed rendü mágikus kocka*

$$\mathbf{M}_n = |\mathbf{m}_n(i,j,k);\ 1 \leq i,j,k \leq n|,$$

egy köbsor egymás utáni természetes számok $1, 2, \ldots, n^3$ sorozata, amelyek összege kiadja a sorokat és a négy átlót úgy, mint $\frac{n(n^3+1)}{2}$.

1. ábra

Az első ábra mutatja $\mathbf{M}_3$-as mágikus kockát, melynél az 1.formulát hosználják. Az $\mathbf{m}_3(1,1,1) = 8$ elem, három sorban található meg, ezek: $\{8, 15, 19\}$, $\{8, 24, 10\}$, $\{8, 12, 22\}$. A 4. testátló három lap elemeiböl tevödik össze $\{8, 14, 20\}$, $\{19, 14, 9\}$, $\{10, 14, 18\}$ és $\{6, 14, 22\}$.

Az itt leírtak adnak algoritmust az $n \neq 2$ rangú mágikus kocka elkészítéséhez. A [3] és [4] formulákat követve helyes biszonyítás adódik.

Használjuk a következő jelöléseket:

$x \pmod{n}$ n-nel való osztás maradékosztálya x,

$\overline{x} = n + 1 - x$,

$x^* = \min\{x, \overline{x}\}$,

$$\widetilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{akkor} \quad 1 \leq x \leq \frac{n}{2} \\ 1 & \text{akkor} \quad \frac{n}{2} < x \leq n. \end{cases}$$

Az n-ed rendű $\mathbf{M}_n = |\mathbf{m}_n(i,j,k)|$ létrozása a következő három formula alapján írható le:

1. Ha $n \equiv 1 \pmod 2$ aztán

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_n(i,j,k) = \ & [(i-j+k-1) \pmod n]\ n^2\ +\ [(i-j-k) \pmod n]\ n \\ & +\ (i+j+k-2) \pmod n\ +\ 1 \end{aligned} \tag{1}$$

2. Ha $n \equiv 0 \pmod 4$ akkor

$$\mathbf{m}_n(i,j,k) = \begin{cases} (i-1)\ n^2 + (j-1)\ n + k & \text{ha} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 1 \\ (\bar{i}-1)\ n^2 + (\bar{j}-1)\ n + \bar{k} & \text{ha} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

ahol

$$\mathbb{F}(i,j,k) = (i+j+k+\widetilde{i}+\widetilde{j}+\widetilde{k}) \pmod 2$$

3. Ha $n \equiv 2 \pmod 4$ (ebben az esetben $\frac{n}{2}$ páratlan) akkor

$$\mathbf{m}_n(i,j,k) = \mathbf{d}(u,v)\frac{n^3}{8} + \mathbf{m}_{\frac{n}{2}}(i^*,j^*,k^*) \tag{3}$$

ahol

$u = (i^* - j^* + k^*) \pmod{\frac{n}{2}} + 1,$

$v = 4\widetilde{i} + 2\widetilde{j} + \widetilde{k} + 1,$

$\mathbf{d}(u,v)$ ezért $1 \le u \le \frac{n}{2}, 1 \le v \le 8$ definiálja a tábla $(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-6}{4})$

	$\mathbf{d}(u,1)$	$\mathbf{d}(u,2)$	$\mathbf{d}(u,3)$	$\mathbf{d}(u,4)$	$\mathbf{d}(u,5)$	$\mathbf{d}(u,6)$	$\mathbf{d}(u,7)$	$\mathbf{d}(u,8)$
$\mathbf{d}(1,v)$	7	3	6	2	5	1	4	0
$\mathbf{d}(2,v)$	3	7	2	6	1	5	0	4
$\mathbf{d}(3,v)$	0	1	3	2	5	4	6	7
$\mathbf{d}(2x+2,v)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{d}(2x+3,v)$	7	6	5	4	3	2	1	0

Megjegyzés. A használt algoritmussal könnyű elkészíteni azt a számítógépés programot, amely megad minden mágikus kockát (vagy mágikus négyzetet) ha $n \neq 2$.

A szerző köszönetét fejezi *Molnár Violá*nak a segítségert a fordításnál.

Irodalom

1. W.S.Andrews, *Magic squares and cubes*, Dover, New York, 1960.
2. W.H.Benson, O.Jacoby, *Magic cubes, New recreations*, Dover, New York, 1981.
3. M.Trenkler, *A construction of magic cubes*, The Mathematical Gazette **84** (March 2000), 45–50.
4. M.Trenkler, *Magic p-dimensional cubes*, Acta Arithmetica **96** (2001), 361-364.

Catholic University, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok, Slovakia
E-mail address: `marian.trenkler@ku.sk` `http://math.ku.sk/~trenkler`